

The condition  $\bar{g} = 0$  determining the swallowtail point  $\bar{\varphi}_{2a}$ :

$$\bar{g} = e_0 + e_1 \cos 2\varphi_{2a} + e_2 \cos^2 2\varphi_{2a} + e_3 \cos^3 2\varphi_{2a} \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} e_0 = & (-256a^2 + 2048a^3 - 7952a^4 + 17896a^5 - 42180a^6 + 49698a^7 - 45918a^8 + 12139a^9 + 5498a^{10} - 5056a^{11} + 2176a^{12} \\ & + 384a^{13} - 256a^{14} - 896a^2b - 7424a^3b + 25176a^4b - 94816a^5b + 66138a^6b - 59598a^7b - 61011a^8b + 52571a^9b \\ & - 26008a^{10}b + 7872a^{11}b + 5248a^{12}b - 1664a^{13}b - 5632ab^2 + 10624a^2b^2 - 65376a^3b^2 + 82644a^4b^2 - 267562a^5b^2 \\ & + 157690a^6b^2 - 248510a^7b^2 + 30741a^8b^2 - 15010a^9b^2 - 9700a^{10}b^2 + 19264a^{11}b^2 - 2560a^{12}b^2 - 4096b^3 + 11776ab^3 \\ & - 106496a^2b^3 + 124736a^3b^3 - 261746a^4b^3 - 71522a^5b^3 + 26470a^6b^3 - 284262a^7b^3 + 65882a^8b^3 - 59482a^9b^3 + 13160a^{10}b^3 \\ & + 4288a^{11}b^3 + 1792b^4 - 39680ab^4 - 94368a^2b^4 + 151472a^3b^4 - 471260a^4b^4 + 353531a^5b^4 - 317636a^6b^4 - 1578a^7b^4 \\ & - 17772a^8b^4 - 51449a^9b^4 + 13370a^{10}b^4 + 12672b^5 - 155648ab^5 + 140784a^2b^5 - 133856a^3b^5 - 59107a^4b^5 + 258731a^5b^5 \\ & - 199218a^6b^5 + 116310a^7b^5 - 77223a^8b^5 - 305a^9b^5 - 10432b^6 - 139168ab^6 + 297728a^2b^6 - 362640a^3b^6 + 388605a^4b^6 \\ & - 61836a^5b^6 + 64746a^6b^6 + 36102a^7b^6 - 23019a^8b^6 - 52512b^7 + 89504ab^7 + 23288a^2b^7 - 99632a^3b^7 + 219224a^4b^7 \\ & - 101868a^5b^7 + 102690a^6b^7 - 8418a^7b^7 - 27584b^8 + 169424ab^8 - 180072a^2b^8 + 128272a^3b^8 - 58746a^4b^8 + 2883a^5b^8 \\ & + 18516a^6b^8 + 29776b^9 + 33104ab^9 - 66784a^2b^9 + 58304a^3b^9 - 56763a^4b^9 + 9331a^5b^9 + 30288b^{10} - 39808ab^{10} \\ & + 23856a^2b^{10} - 5200a^3b^{10} - 7627a^4b^{10} + 1920b^{11} - 19136ab^{11} + 15224a^2b^{11} - 3440a^3b^{11} - 6560b^{12} - 1712ab^{12} \\ & + 1880a^2b^{12} - 2608b^{13} + 208ab^{13} - 304b^{14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 = & (768a^2 - 8192a^3 + 29232a^4 - 53624a^5 + 62876a^6 - 40558a^7 - 12938a^8 + 20677a^9 - 5530a^{10} + 7104a^{11} - 3456a^{12} \\ & - 1152a^{13} + 768a^{14} - 2432a^2b + 7936a^3b - 33736a^4b + 29568a^5b + 12714a^6b - 193838a^7b + 116723a^8b - 42187a^9b \\ & + 57176a^{10}b - 7488a^{11}b - 15744a^{12}b + 4992a^{13}b + 4608ab^2 - 23424a^2b^2 - 71136a^3b^2 + 2900a^4b^2 - 34554a^5b^2 \\ & - 397918a^6b^2 + 114374a^7b^2 - 98709a^8b^2 + 104642a^9b^2 + 68580a^{10}b^2 - 58176a^{11}b^2 + 7680a^{12}b^2 + 4096b^3 - 4608ab^3 \\ & - 237440a^2b^3 + 14272a^3b^3 - 390082a^4b^3 - 328546a^5b^3 - 279710a^6b^3 - 498a^7b^3 - 123322a^8b^3 + 250042a^9b^3 - 42024a^{10}b^3 \\ & - 12864a^{11}b^3 + 15104b^4 - 208128ab^4 - 268832a^2b^4 - 560752a^3b^4 - 249816a^4b^4 - 782883a^5b^4 + 163796a^6b^4 - 416850a^7b^4 \\ & + 110628a^8b^4 + 150441a^9b^4 - 40218a^{10}b^4 - 20608b^5 - 410112ab^5 - 549392a^2b^5 - 241248a^3b^5 - 667349a^4b^5 - 192707a^5b^5 \\ & - 38842a^6b^5 - 460386a^7b^5 + 240039a^8b^5 + 321a^9b^5 - 87232b^6 - 531232ab^6 - 127776a^2b^6 - 48048a^3b^6 - 613485a^4b^6 \\ & + 424280a^5b^6 - 475566a^6b^6 - 81414a^7b^6 + 68571a^8b^6 - 129568b^7 - 220768ab^7 + 446152a^2b^7 - 351312a^3b^7 + 166692a^4b^7 \\ & + 172440a^5b^7 - 308034a^6b^7 + 27522a^7b^7 - 73088b^8 + 236976ab^8 + 236648a^2b^8 - 194896a^3b^8 + 378342a^4b^8 - 63603a^5b^8 \\ & - 52308a^6b^8 + 27184b^9 + 256048ab^9 - 66880a^2b^9 + 57600a^3b^9 + 146331a^4b^9 - 31395a^5b^9 + 49328b^{10} + 61888ab^{10} \\ & - 76752a^2b^{10} + 63696a^3b^{10} + 17211a^4b^{10} + 19008b^{11} - 16128ab^{11} - 20088a^2b^{11} + 12912a^3b^{11} + 2144b^{12} - 10320ab^{12} \\ & - 1752a^2b^{12} + 48b^{13} - 1488ab^{13} + 48b^{14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 = & (-768a^2 + 10240a^3 - 38704a^4 + 40248a^5 + 22292a^6 - 86666a^7 + 58926a^8 + 9781a^9 - 17722a^{10} + 960a^{11} + 384a^{12} \\ & + 1152a^{13} - 768a^{14} + 7552a^2b - 14080a^3b - 130936a^4b + 322592a^5b - 350306a^6b - 5690a^7b + 224275a^8b - 39547a^9b \\ & - 36328a^{10}b - 8640a^{11}b + 15744a^{12}b - 4992a^{13}b + 7680ab^2 - 9600a^2b^2 - 135712a^3b^2 - 25380a^4b^2 + 28530a^5b^2 \\ & - 565298a^6b^2 + 301230a^7b^2 + 370155a^8b^2 - 119710a^9b^2 - 108060a^{10}b^2 + 58560a^{11}b^2 - 7680a^{12}b^2 + 4096b^3 - 9728ab^3 \\ & - 24832a^2b^3 - 442688a^3b^3 - 653606a^4b^3 + 147178a^5b^3 - 944630a^6b^3 + 992022a^7b^3 + 255590a^8b^3 - 321638a^9b^3 \\ & + 44568a^{10}b^3 + 12864a^{11}b^3 - 2816b^4 - 1280ab^4 - 211424a^2b^4 - 2223920a^3b^4 + 491332a^4b^4 - 1151147a^5b^4 - 191580a^6b^4 \\ & + 1137186a^7b^4 - 166404a^8b^4 - 146535a^9b^4 + 40326a^{10}b^4 - 21376b^5 + 82944ab^5 - 2112432a^2b^5 - 1485216a^3b^5 \\ & + 445779a^4b^5 - 1872507a^5b^5 + 727306a^6b^5 + 578754a^7b^5 - 248409a^8b^5 + 273a^9b^5 + 13248b^6 - 653024ab^6 - 2737600a^2b^6 \\ & + 587536a^3b^6 - 1149981a^4b^6 - 936460a^5b^6 + 769182a^6b^6 + 54522a^7b^6 - 68085a^8b^6 - 48224b^7 - 1391648ab^7 - 790904a^2b^7 \\ & + 479280a^3b^7 - 1381968a^4b^7 - 28524a^5b^7 + 307998a^6b^7 - 29790a^7b^7 - 200128b^8 - 862416ab^8 + 532584a^2b^8 - 308624a^3b^8 \\ & - 594270a^4b^8 + 118557a^5b^8 + 49068a^6b^8 - 187728b^9 - 80ab^9 + 391712a^2b^9 - 335424a^3b^9 - 122373a^4b^9 + 34797a^5b^9 \\ & - 43088b^{10} + 235264ab^{10} + 69648a^2b^{10} - 111792a^3b^{10} - 11541a^4b^{10} + 35072b^{11} + 117312ab^{11} - 5496a^2b^{11} \\ & - 15504a^3b^{11} + 27680b^{12} + 25776ab^{12} - 2136a^2b^{12} + 7728b^{13} + 2352ab^{13} + 816b^{14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_3 = & (256a^2 - 4096a^3 + 17424a^4 - 4520a^5 - 51180a^6 + 52950a^7 + 16314a^8 - 42597a^9 + 17754a^{10} - 3008a^{11} + 896a^{12} \\
& - 384a^{13} + 256a^{14} - 4224a^2b + 13568a^3b + 139496a^4b - 314688a^5b - 7074a^6b + 414774a^7b - 279987a^8b + 29163a^9b \\
& + 5160a^{10}b + 8256a^{11}b - 5248a^{12}b + 1664a^{13}b - 6656ab^2 + 22400a^2b^2 + 272224a^3b^2 - 199428a^4b^2 - 1045326a^5b^2 \\
& + 1313430a^6b^2 - 117942a^7b^2 - 302187a^8b^2 + 30078a^9b^2 + 49180a^{10}b^2 - 19648a^{11}b^2 + 2560a^{12}b^2 - 4096b^3 + 2560ab^3 \\
& + 368768a^2b^3 + 197184a^3b^3 - 1995942a^4b^3 + 588762a^5b^3 + 1566510a^6b^3 - 707262a^7b^3 - 198150a^8b^3 + 131078a^9b^3 \\
& - 15704a^{10}b^3 - 4288a^{11}b^3 - 14080b^4 + 249088ab^4 + 656544a^2b^4 - 1954320a^3b^4 - 1654416a^4b^4 + 2514387a^5b^4 \\
& + 394572a^6b^4 - 718758a^7b^4 + 73548a^8b^4 + 47543a^9b^4 - 13478a^{10}b^4 + 29312b^5 + 646656ab^5 - 878640a^2b^5 - 3259680a^3b^5 \\
& + 796773a^4b^5 + 2076819a^5b^5 - 489246a^6b^5 - 234678a^7b^5 + 85593a^8b^5 - 289a^9b^5 + 149952b^6 + 176544ab^6 - 2773536a^2b^6 \\
& - 1782480a^3b^6 + 1817229a^4b^6 + 590400a^5b^6 - 358362a^6b^6 - 9210a^7b^6 + 22533a^8b^6 + 132000b^7 - 926496ab^7 \\
& - 2586696a^2b^7 - 36528a^3b^7 + 1053396a^4b^7 - 42048a^5b^7 - 102654a^6b^7 + 10686a^7b^7 - 76032b^8 - 1280688ab^8 \\
& - 1219944a^2b^8 + 416208a^3b^8 + 274674a^4b^8 - 57837a^5b^8 - 15276a^6b^8 - 205104b^9 - 813360ab^9 - 299008a^2b^9 \\
& + 219520a^3b^9 + 32805a^4b^9 - 12733a^5b^9 - 159408b^{10} - 314688ab^{10} - 16752a^2b^{10} + 53296a^3b^{10} + 1957a^4b^{10} \\
& - 72384b^{11} - 82048ab^{11} + 10360a^2b^{11} + 6032a^3b^{11} - 23264b^{12} - 13744ab^{12} + 2008a^2b^{12} - 5168b^{13} - 1072ab^{13} - 560b^{14})
\end{aligned}$$